

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2008-05-29

1) Lösning

Frobeniusansatsen $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med respektive derivata insatt i differentialekvationen ger

$$0 = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (3x+2x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad (1)$$

som leder till

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} \quad (2)$$

Förkortning med x^r och hopslagning av summor med samma potens av x ger

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1] a_n x^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r) + 1] a_n x^{n+1}}_{n+1 \rightarrow n} \quad (3)$$

Efter enkla räkningar fås

$$0 = [2r(r-1) + 3r - 1]a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r+1)(2n+2r-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+2r-1)a_{n-1} x^n \quad (4)$$

a_0 termen i ekv(4) med $a_0 \neq 0$ ger den s k indexekvationen

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 2r^2 + r - 1 = 0 \quad (5)$$

som leder till

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = -1 \quad (6)$$

Det andra och tredje sambandet i ekv(4) ger oss

$$(n+r+1)(2n+2r-1)a_n = -(2n+2r-1)a_{n-1} \quad (7)$$

som resulterar för $n \geq 1$ i rekursionsformeln

$$a_n = -\frac{1}{n+r+1} a_{n-1}$$

Fall 1: $r_1 = \frac{1}{2}$, ger $a_n = -\frac{2}{2n+3} a_{n-1} \implies$

$$a_1 = -\frac{2}{5} a_0, \quad a_2 = \frac{4}{35} a_0, \quad a_3 = -\frac{8}{315} a_0; \quad (8)$$

Om vi sätter $a_0 = 1$ får vi

$$y_1 = x^{1/2} \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 - \frac{8}{315}x^3 + \dots \right) \quad (9)$$

Fall 2: $r_2 = -1$, ger $a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} \implies$

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2} a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{6} a_0; \quad (10)$$

Om vi även här sätter $a_0 = 1$ får vi

$$y_2 = x^{-1} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right) \quad (11)$$

och den allmänna lösningen till differentialekvationen blir

$$y = A x^{1/2} \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 - \frac{8}{315}x^3 + \dots \right) + B x^{-1} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right)$$

2) Lösning

Eftersom våra randvillkor inte är homogena, vilket krävs för variabelseparation, måste vi skaffa oss sådana. Det gör vi genom att ansätta en superposition av en stationär lösning $u_s(x)$ och en (x,t) -beroende lösning $v(x,t)$.

Den stationära får vi genom att bestämma $u_s(x)$ via $u_s''(x) = 0$ med det allmänna svaret $u_s(x) = C_1 + C_2x$.

Villkoren $u_s'(0) = 0$ och $u_s(1) = 3$ resulterar i $u_s(x) = 3$ och vi får sambanden

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \implies v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + u_s''(x) = v_{xx}(x,t) \quad (12)$$

$$u_x(0,t) = 0 \implies v_x(0,t) = u_x(0,t) - u_s'(0) = 0 - 0 = 0 \quad (13)$$

$$u(1,t) = 3 \implies v(1,t) = u(1,t) - u_s(1) = 3 - 3 = 0 \quad (14)$$

Vi har härmed kommit fram till att lösa ett randvärdesproblem för $v(x,t)$ med homogena randvillkor $v_x(0,t) = v(1,t) = 0$ och skall alltså studera problemet

$$\text{PDE: } v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) \quad (15)$$

$$\text{RV: } v_x(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \quad (16)$$

$$\text{BV: } v(x,0) = \cos \frac{3\pi x}{2} \quad (17)$$

med variabelseparation $v = XT$ och får det aktuella systemet

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \dots \text{separationskonstanten} \quad (18)$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0 \quad X(1) = 0 \quad (19)$$

$$T' + \lambda T = 0 \quad (20)$$

Vi undersöker nu 3 olika fall:

$$\lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 : X(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, \quad (21)$$

$$X'(0) = 0, \implies C_1 - C_2 = 0 \quad (22)$$

$$X(1) = 0, \implies C_1 = C_2 = 0 \quad (23)$$

Vi har endast lösningen $X \equiv 0$.

$$\lambda = 0 : X(x) = C_1 + C_2 x, \quad (24)$$

$$X'(0) = 0, \implies C_2 = 0 \quad (25)$$

$$X(1) = 0, \implies C_1 = 0 \quad (26)$$

Vi har även här endast lösningen $X \equiv 0$.

$$\lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 : X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x, \quad (27)$$

$$X'(0) = 0, \implies C_2 = 0 \quad (28)$$

$$X(1) = 0, \implies C_1 \neq 0, \cos \alpha = 0 \quad (29)$$

Sambandet (29) innebär att $\alpha = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi$ och motsvarande egenfunktion blir

$$\underline{X_n = \cos \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots}$$

Ekv (20) ger $T_n = B_n e^{-\lambda_n t}$ med $\lambda_n = \alpha_n^2 = \left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ och den totala allmänna lösningen blir

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n t} \cos \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x \quad (30)$$

Nu är det dags att använda begynnelsevillkoret (17)

$$v(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x \quad (31)$$

Identifiering ger $B_2 = 1$, $B_n = 0$ för $n \neq 2$ och delsvaret blir

$$v(x, t) = e^{-9\pi^2 t/4} \cos \left(\frac{3\pi}{2}\right) x \quad (32)$$

samt slutsvaret

$$u(x, t) = u_s(x) + v(x, t) = 3 + e^{-9\pi^2 t/4} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

3) Lösning

Låt

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \quad (33)$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x . Fouriertransformering av PDE'n ger

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) \quad (34)$$

en ODE i t som har lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega) e^{-\omega^2 t} \quad (35)$$

Insättning av $t = 0$ ger att integrationskonstanten blir

$$A(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}[e^{-x^2} + e^{-x^2/2}](\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} + \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} \quad (36)$$

Ekv(35) ger nu

$$\hat{u}(\omega, t) = \left(\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} + \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} \right) e^{-\omega^2 t} \quad (37)$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4 - \omega^2 t} + \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2 - \omega^2 t} \quad (38)$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2(t+1/4)} + \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2(t+1/2)} \quad (39)$$

Inverstransformering m h a BETA leder till svaret:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}} + \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2+4t}}$$

Observera att denna lösning endast existerar så länge $1 + 4t > 0$, dvs $t > t_0 = -\frac{1}{4}$!!!!

4) Lösning

Variabelseparation $u(x, t) = X(x)T(t)$ ger

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = \lambda \quad (40)$$

och sambanden

$$T' - 2\lambda T = 0 \quad (41)$$

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0 \quad (42)$$

Vi undersöker nu 3 olika fall:

$$\underline{\lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0}: X(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, \quad (43)$$

$$X'(x) = \alpha(C_1 e^{\alpha x} - C_2 e^{-\alpha x}), \quad (44)$$

$$X(0) = 0 \implies C_1 + C_2 = 0 \quad (45)$$

$$X'(1) = 0 \implies C_1 = C_2 = 0 \quad (46)$$

Vi har ingen icke-trivial lösning.

$$\underline{\lambda = 0}: X(x) = C_1 + C_2 x, \quad (47)$$

$$X'(x) = C_2, \quad (48)$$

$$X(0) = 0 \implies C_1 = 0 \quad (49)$$

$$X'(1) = 0 \implies C_2 = 0 \quad (50)$$

Vi har ingen icke-trivial lösning nu heller.

$$\underline{\lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0}: X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x, \quad (51)$$

$$X'(x) = \alpha(-C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x), \quad (52)$$

$$X(0) = 0 \implies C_1 = 0 \quad (53)$$

$$X'(1) = 0 \implies \alpha C_2 \neq 0, \cos \alpha = 0 \quad (54)$$

Sambandet (54) innebär att $\alpha = (n - 1/2)\pi$ och motsvarande egenfunktion blir

$$\underline{X_n = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x, n = 1, 2, 3, \dots}$$

Med α enligt ovan insatt i ekv(41) får vi

$$T_n = A_n e^{-2\alpha_n^2 t} = A_n e^{-2((2n-1)\pi/2)^2 t} \quad (55)$$

och vi får den allmänna lösningen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi(n-1/2)^2 t} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

där A_n bestäms m h a det återstående begynnelsevärdet

$$u(x, 0) = -x^2 + x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x \quad (56)$$

Fourierserietvecklingen av $u(x, 0)$ m h a BETA ger ganska snabbt

$$A_n = 2 \int_0^1 (-x^2 + x) \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x dx = \dots = \frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3} \quad (57)$$

och problemets lösning blir då

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3} e^{-2(\pi(n-1/2))^2 t} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} x$$

5) Lösning

Det första randvillkoret säger att membranet är inspönt och det andra begynnelsevillkoret säger att membranet släpps från ett viloläge.

Vi separerar tid och rum med ansatsen

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \tag{58}$$

och får

$$\frac{R\Theta T''}{R\Theta T} = \frac{R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta''T}{R\Theta T} = k = \text{konstant} \tag{59}$$

$$\implies \frac{T''(t)}{T(t)} = k = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} \tag{60}$$

Om $k \geq 0$ ser man att $T(t)$ inte blir någon svängning, alltså måste vi välja $k < 0$, säg $k = -\lambda^2, \lambda > 0$. $T(t)$ uppfyller då $T'' + \lambda^2 T = 0$, som har lösningen

$$T(t) = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t \tag{61}$$

Det andra BV innebär att $T'(0) = 0 \implies B = 0$, härmed blir

$$T(t) = A \cos \lambda t \tag{62}$$

En enkel omformning av rumsdelen i sambandet(60) och $k = -\lambda^2$ ger

$$\frac{r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2 = \text{ny konstant} \tag{63}$$

$$\implies \Theta'' + \mu^2 \Theta = 0 \quad \text{och} \quad r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R - \mu^2 R = 0 \tag{64}$$

Detta leder till 2 ODE med resp randvillkor:

$$\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \tag{65}$$

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R - \mu^2 R = 0, \quad R(0) < \infty, \quad R(3) = 0 \tag{66}$$

ODE(65) har lösningen $\Theta = a \cos \mu\theta + b \sin \mu\theta$ där vi måste välja $\mu = m = 0, 1, 2, \dots$ för att satisfiera randvillkoren och vi får

$$\Theta_m = a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{67}$$

Med $\mu = m$ insatt i ODE(66) får vi Bessels differentialekvation av ordning m som har lösningen

$$R(r) = C J_m(\lambda r) + D Y_m(\lambda r) \tag{68}$$

Randvillkoren $R(0) < \infty$ resp $R(3) = 0$ kräver $D = 0$ resp $R(3) = C J_m(\lambda 3) = 0$ m a o $\lambda 3$ måste vara det n -te positiva nollställe α_{mn} , $n = 1, 2, 3, \dots$ av $R(3)$. På det viset får vi egenvärdet $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{3}$ och vi får den slutliga lösningen till ODE(66)

$$R(r) = R_{mn}(r) = C_{mn} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{3} r \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots \quad (69)$$

Därmed ser vi att ansatsen $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ ger

$$u_{mn}(r, \theta, t) = C_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) A \cos \lambda_{mn} t \quad (70)$$

$$= J_m(\lambda_{mn} r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \cos \lambda_{mn} t \quad (71)$$

där vi satte $A_{mn} = C_{mn} a_m A$ och $B_{mn} = C_{mn} b_m A$.

Superpositionsprincipen tillämpad på PDE + RV + BV enligt texten visar sedan att den allmänna lösningen blir

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} u_{mn}(r, \theta, t) \quad (72)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \cos \lambda_{mn} t \quad (73)$$

där vi satte $a_{mn} = c_{mn} A_{mn}$ och $b_{mn} = c_{mn} B_{mn}$.

Återstår att anpassa denna lösning till BV

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) = (9 - r^2)r^2 \cos 2\theta \quad (74)$$

Detta innebär att vi skall studera

$$(9 - r^2)r^2 \cos 2\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \quad (75)$$

Eftersom $f(r, \theta)$ är proportionell mot $\cos 2\theta$ blir alla $a_{mn}, b_{mn} = 0$ utom $a_{2n} \neq 0$, m a o har vi $m = 2$ enligt ekv(75). På det viset får vi ett delresultat

$$(9 - r^2)r^2 \cos 2\theta = \sum_{n=1}^{\infty} J_2(\lambda_{2n} r) a_{2n} \cos 2\theta \quad (76)$$

Genom att förkorta bort $\cos 2\theta$ ser vi att vi måste hitta koefficienter a_{2n} som uppfyller

$$(9 - r^2)r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} J_2(\lambda_{2n} r) \quad (77)$$

Besselfunktionernas ortogonalitetsegenskaper, se BETA, ger oss nu möjligheten att beräkna a_{2n} genom att multiplicera ekv(77) på båda sidor med $J_2(\lambda_{2n} r)r$ och sedan integrera r från 0 till 3, vi erhåller då, med insatt $\lambda_{2n} = \alpha_{2n}/3$

$$\int_{r=0}^3 (9 - r^2)r^2 J_2 \left(\frac{\alpha_{2n}}{3} r \right) r dr = a_{2n} \int_{r=0}^3 J_2^2 \left(\frac{\alpha_{2n}}{3} r \right) r dr \quad (78)$$

$$= a_{2n} \left\| J_2 \left(\frac{\alpha_{2n}}{3} r \right) \right\|_r^2 = a_{2n} \frac{3^2 J_3^2(\alpha_{2n})}{2}, \quad \text{för } 0 \leq r \leq 3 \quad (79)$$

För att lösa integralen i VL av ekv(78) använder vi den angivna formeln på tentan:

$$\int_0^a (a^2 - r^2)r^{k+1} J_k\left(\frac{\alpha}{a} r\right) dr = 2 \frac{a^{k+4}}{\alpha^2} J_{k+2}(\alpha) \quad (80)$$

där vi i vårt problem har $k = 2$, $a = 3$, $\alpha = \alpha_{2n}$.

Sammanfattningsvis ger oss HL i ekv(79) och ekv(80) sambandet

$$a_{2n} \frac{3^2 J_3^2(\alpha_{2n})}{2} = 2 \frac{3^6}{\alpha_{2n}^2} J_4(\alpha_{2n}) \quad (81)$$

och delresultatet blir

$$a_{2n} = \frac{324 J_4(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}^2 J_3^2(\alpha_{2n})} \quad (82)$$

Detta är i sammanhanget ett fullt acceptabelt delsvar, som dock kan förenklas m h a ett samband tagen ur BETA:

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) \quad (83)$$

Om vi väljer $p = 3$ får vi

$$\underbrace{J_2(\alpha_{2n})}_{=0} + J_4(\alpha_{2n}) = \frac{2 \cdot 3}{\alpha_{2n}} J_3(\alpha_{2n}) \quad (84)$$

Insättning i ekv(82) leder till

$$a_{2n} = \frac{324}{\alpha_{2n}^2 J_3^2(\alpha_{2n})} \frac{6 J_3(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}} = \frac{1944}{\alpha_{2n}^3 J_3(\alpha_{2n})} \quad (85)$$

Lägger vi ihop alla delsvar vi har fått på vägen, så får vi slutsvaret

$$u(r, \theta, t) = 1944 \cos 2\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2\left(\frac{\alpha_{2n}}{3} r\right) \cos\left(\frac{\alpha_{2n}}{3} t\right)}{\alpha_{2n}^3 J_3(\alpha_{2n})}$$